CHAPITRE 3 : Miroirs plans et sphériques

Un miroir est une portion de surface réfléchissante. Il peut être fait d'un métal poli ou d'un matériau quelconque recouvert d'une couche réfléchissante, d'argent, d'étain ou d'aluminium déposé chimiquement. Nous étudions dans ce chapitre la formation des images par les miroirs plans et sphériques. Les miroirs plans donnent une image virtuelle et nette et de même taille que l'objet. Ils constituent un système parfaitement ou rigoureusement stigmatique. Les miroirs sphériques donnent une image virtuelle ou réelle approximativement nette et de taille plus grande ou plus petite que l'objet. À part leur usage domestique, on utilise les miroirs dans les instruments d'optique (appareils photographiques, microscopes, télescopes, etc.).

1. Miroir plan

1.1. Définition

Un miroir plan est une surface réfléchissante plane. Un tel miroir M est généralement représenté par la trace de son plan disposé normalement au plan de figure. On couvre de hachures le côté non réfléchissant.

1.2. Formation d'une image

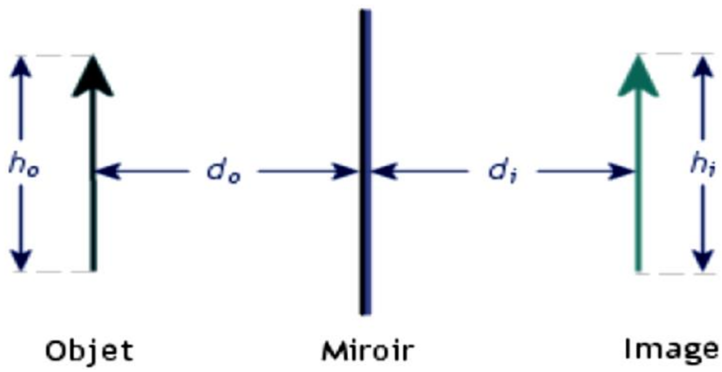
L'image formée par un miroir plan est virtuelle et est située derrière le miroir à une distance égale à la distance entre le miroir et l'objet. Cette image est inversée (gauche-droite) mais pas renversée (haut-bas).

Une image est virtuelle lorsqu'elle est formée à l'intersection du prolongement des rayons réfléchis.

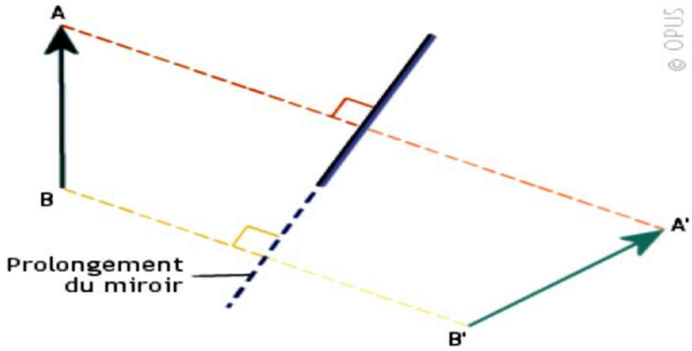
Une image est réelle lorsqu'elle est formée à l'intersection des rayons réfléchis eux-mêmes.

L'image réelle peut être projetée sur un écran contrairement à l'image virtuelle.

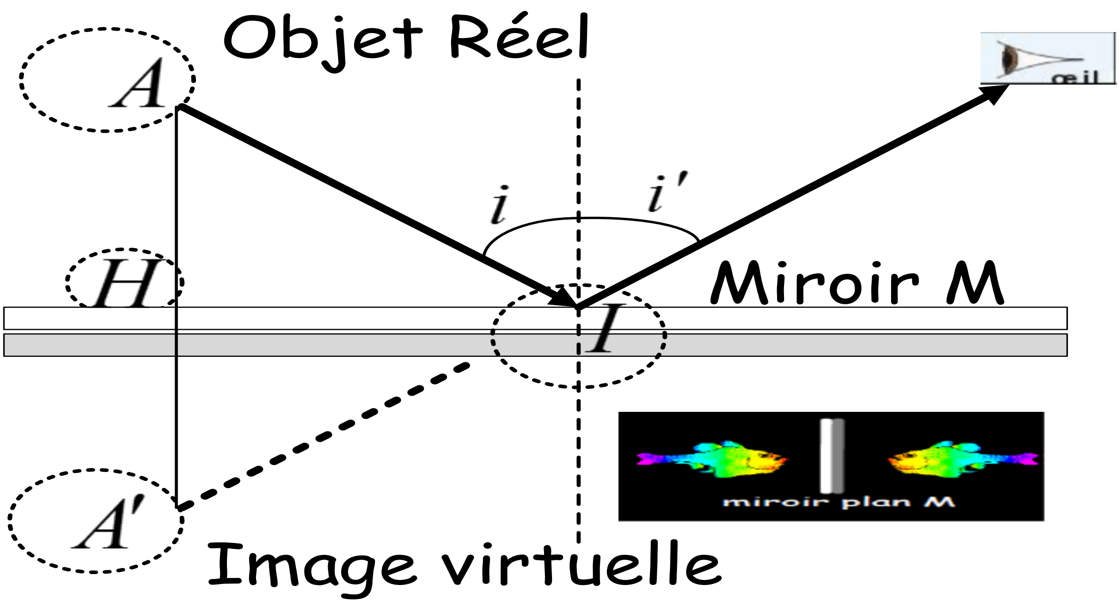
L'image produite par un miroir plan de même grandeur que l'objet $(h_1 = h_0)$ et à une distance derrière le miroir égale à la distance entre l'objet et le miroir $(d_1 = d_0)$.



Afin de déterminer géométriquement la position d'une image, il faut tracer à partir de différents points de l'objet, une droite normale à la surface du miroir. Le point image se trouve sur cette droite, à la même distance du miroir que le point objet correspondant. Il est possible de reconstruire l'image de l'objet point par point. Si nécessaire, on peut aussi prolonger graphiquement le miroir dans le cas où l'objet n'est pas situé entièrement devant le miroir.



Un miroir plan donne de tout objet une image symétrique par rapport au plan du miroir. En d'autres termes l'objet A et son image A' fournie par le miroir M sont symétriques par rapport à M



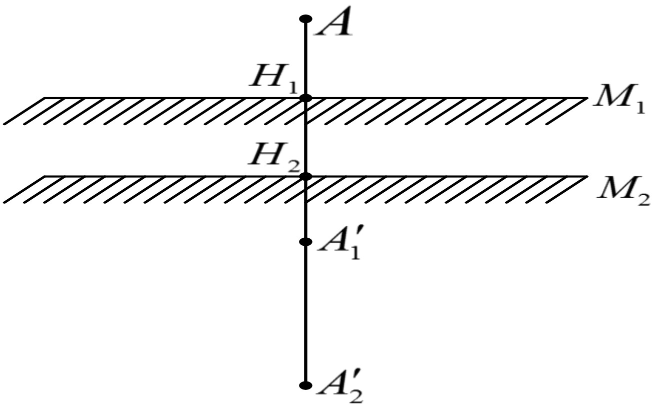
$$\boxed{\overline{AH} = \overline{HA'}}$$

A et A' sont conjugués par le miroir plan M.

Le grandissement d'un miroir plan est égal à 1.

1.3. Déplacement du miroir

1.3.1.Translation



$$\overline{A'_1A'_2} = \overline{A'_1H_1} + \overline{H_1H_2} + \overline{H_2A'_2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A'_1H_1} = \overline{H_1A} \\ \overline{H_2A'_2} = \overline{AH_2}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A'_1A'_2} = \overline{H_1A} + \overline{H_1H_2} + \overline{AH_2} = \overline{H_1H_2} + \overline{H_1H_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\overline{A'_1A'_2} = 2\overline{H_1H_2}}}$$

Ainsi l'image se déplace dans le même sens que le miroir et d'une longueur double.

1.3.2.Rotation

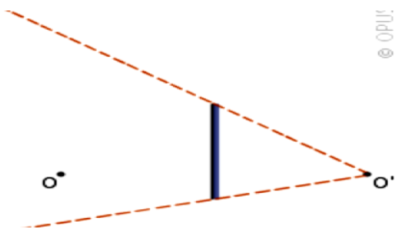
Lorsqu'un miroir plan tourne d'un angle θ autour d'un axe quelconque le rayon réfléchi correspondant à un rayon incident quelconque tourne autour de cet axe et dans le même sens d'un angle double 2θ.

1.4. Champ de vision

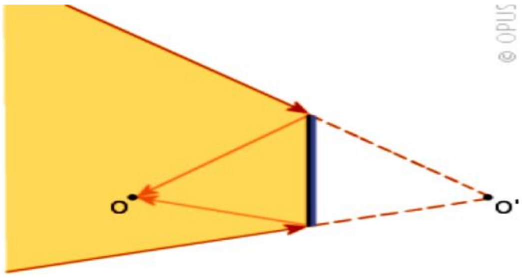
Le champ de vision d'un observateur est l'espace qui est rendu visible grâce, par exemple, à un miroir plan. Pour déterminer le champ de vision d'un observateur placé devant un miroir plan, on procède de la manière suivante :

1. Déterminer la position de l'image (O') de l'observateur (O).

2. Tracer deux droites ayant pour origine l'image de l'observateur et passant par les extrémités du miroir.



3. Ces deux droites délimitent le champ de vision de l'observateur (en jaune).



Le champ de vision du miroir plan correspond donc à ce que verrait l'observateur s'il était placé à la position de son image O' et si le miroir était remplacé par une fenêtre.

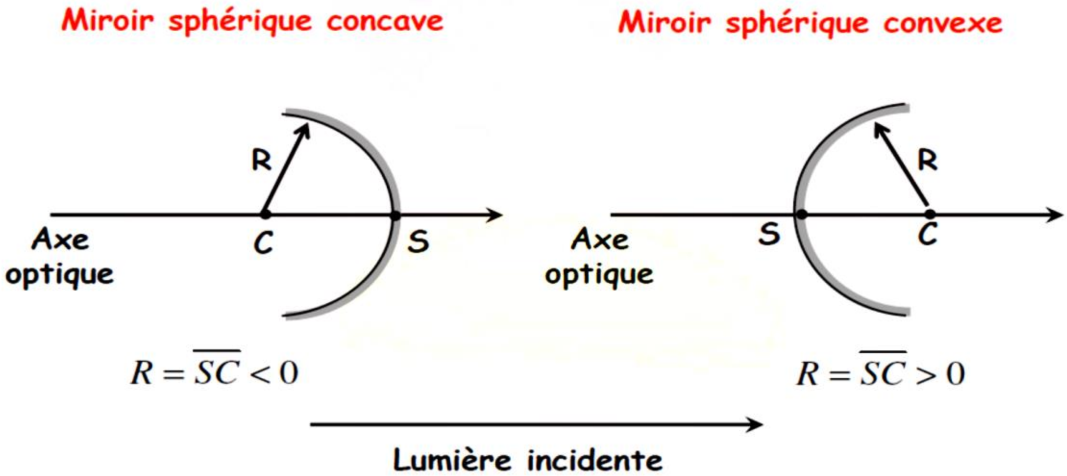
2. Miroirs sphériques

On étudiera le miroir sphérique dans le cadre de l'approximation de Gauss.

2.1. Définition et notation

Un miroir sphérique est une portion de sphère polie. Les miroirs sphériques sont utilisés dans les instruments d'optique. Ils servent comme focaliseurs des faisceaux de rayons lumineux ou infrarouges des lentilles. Exemples d'utilisation de miroirs sphériques : rétroviseurs de voitures, miroirs de surveillance, télescopes.

Les miroirs sphériques peuvent être concaves ou convexes selon qu'ils réfléchissent la lumière vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la sphère. Le centre C de la sphere est le centre du miroir, l'axe de symétrie CS est l'axe prinicpal et S son sommet. On définit le rayon R (algébrique) par : $R = \overline{SC}$ et $|R|$ le rayon de courbure.



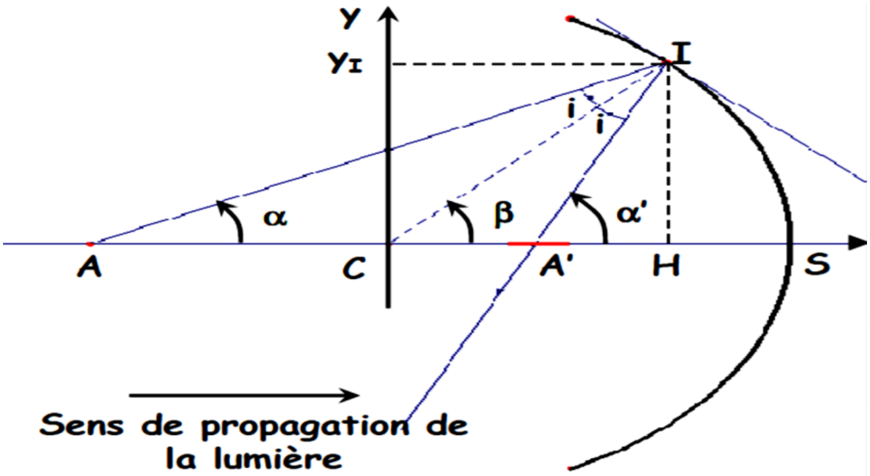
Remarque : en optique géométrique, la mesure des distances est algébrisée. Le long de l'axe optique, on choisit comme sens positif le sens de propagation de la lumière (en général de la gauche vers la droite). Perpendiculairement à l'axe, les distances sont comptées positivement dans le sens de la verticale ascendante.

2.2. Etude du stigmatisme du miroir sphérique

2.2.1. Cas général

De façon générale, le miroir sphérique est astigmatique.

2.2.2. Stigmatisme approché sur l'axe, formule de conjugaison



On se place dans les conditions de Gauss, les angles α, α'et β sont petits : $\sin\alpha \cong \tan\alpha \cong \alpha$. Il en est de même pour α'et β. Dans ces mêmes conditions, les points H et S sont confondus.

On appelle relation de conjugaison une relation entre la position d'un objet A et celle de son image A' sur l'axe optique. L'expression de cette relation dépend du choix de l'origine des positions.

Les points H (projeté orthogonal de I sur l'axe optique) et le sommet S sont, dans les conditions de Gauss, confondus). En effet dans le triangle ICH rectangle en H

$$CI^2 = CH^2 + IH^2$$

$$CH^2 = R^2 - y_I^2 = R^2\left(1 - \frac{y_I^2}{R^2}\right) \Longrightarrow CH = R\left(1 - \frac{y_I^2}{R^2}\right)^{1/2} \cong R\left(1 - \frac{y_I^2}{2R^2}\right)$$

$$\Longrightarrow CH \cong R\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right)$$

Ainsi au 1er ordre en α, $CH \cong R$: les points H et S sont confondus.

2.2.2.1. Relation de conjugaison (avec origine au sommet) pour un miroir concave

On veut déterminer une relation entre $\overline{SA}$ et $\overline{SA'}$.

$$\alpha \cong \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}} \cong \frac{\overline{SI}}{-\overline{SA}} \quad ; \quad \alpha' \cong \frac{\overline{HI}}{\overline{A'H}} \cong \frac{\overline{SI}}{-\overline{SA'}} \quad ; \quad \beta \cong \frac{\overline{HI}}{\overline{CH}} \cong \frac{\overline{SI}}{-\overline{SC}}$$

Dans le triangle (AIC) : $\alpha + i + \pi - \beta = \pi \Longrightarrow i = \beta - \alpha$

Dans le triangle $(A'IC)$: $-\alpha' + i + \pi + \beta = \pi \Longrightarrow i = -\beta + \alpha'$

$$\Longrightarrow i = \beta - \alpha = -\beta + \alpha' \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\alpha' + \alpha = 2\beta}}$$

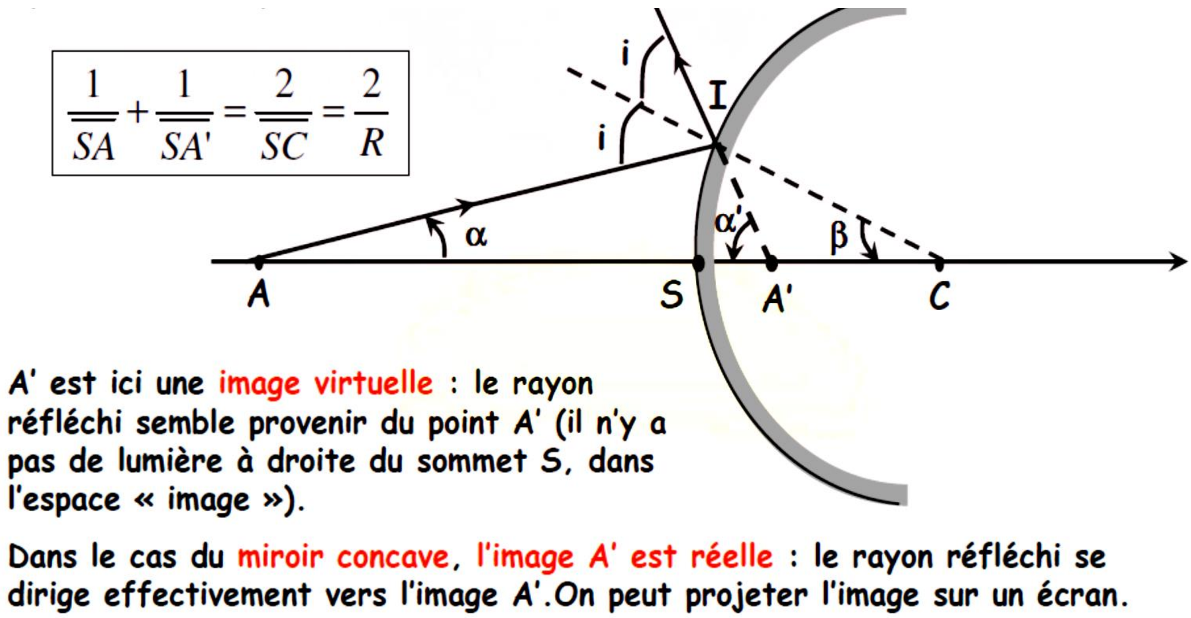
$$\Longrightarrow \frac{\overline{SI}}{\overline{SA}} + \frac{\overline{SI}}{\overline{SA'}} = 2\frac{\overline{SI}}{\overline{SC}} \Longrightarrow \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\overline{\boldsymbol{SA}}} + \frac{\mathbf{1}}{\overline{\boldsymbol{SA'}}} = \frac{\mathbf{2}}{\overline{\boldsymbol{SC}}} = \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{R}}}$$

C'est la relation de conjugaison du miroir sphérique concave avec origine au sommet S.

Cette relation montre que pour A' donné la position A est independante du rayon $A'I$: il y a stigmatisme approché pour tout point A de l'axe optique.

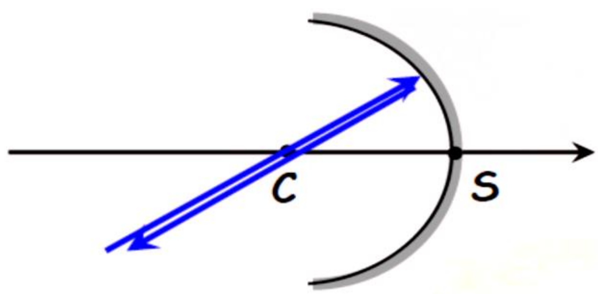
2.2.2.2. Relation de conjugaison (avec origine au sommet) pour un miroir convexe

C'est le même que pour le miroir concave

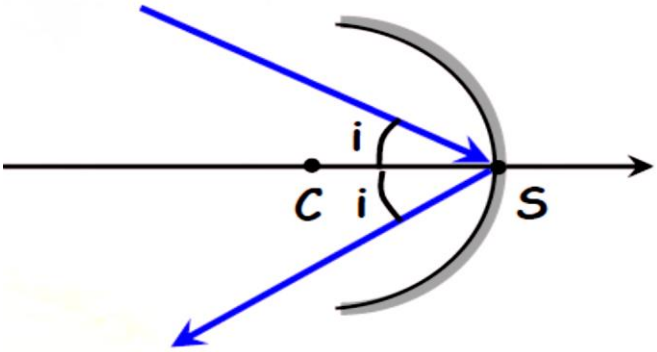


2.2.2.3. Deux points particuliers : le centre C et le sommet S

- Tout rayon passant par C arrive sous incidence normale sur le miroir et revient sur lui-même après réflexion sur le miroir en repassant par C.



- Tout rayon arrivant en S sur le miroir est réfléchi symétriquement en provenant de S.



2.3. Foyer image, foyer objet, distance focale, vergence

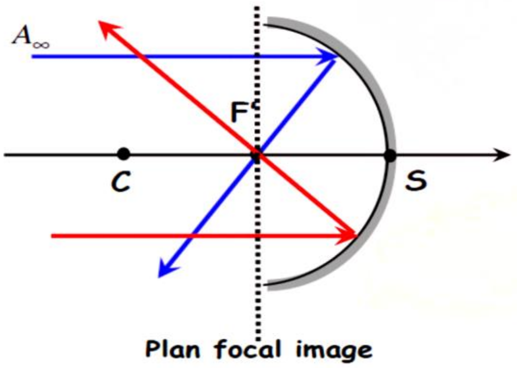
- **Foyer image F'**

Le foyer image F' est l'image (le conjugué) d'un objet A_∞ situé à l'infini sur l'axe optique.

Avec $\frac{1}{\overline{SA}} = 0$, on obtient :

$$\frac{1}{\overline{SF'}} = \frac{2}{R} \Rightarrow \boxed{\overline{SF'} = \frac{R}{2}}$$

Le foyer image F' est situé au milieu du segment CS.



$f' = \overline{SF'} = \frac{R}{2}$: distance focale image $\qquad V' = \frac{1}{f'}$: Vergence image

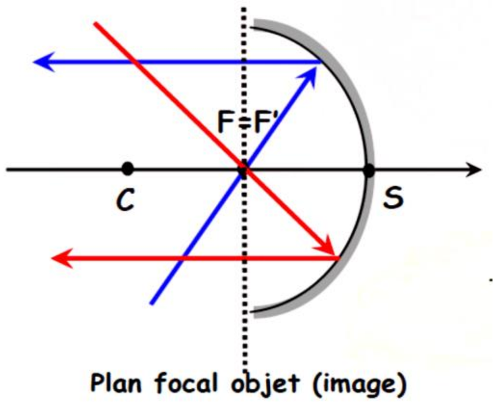
- **Foyer image F**

Tout rayon qui passe par le foyer objet F ressort parallèle à l'axe optique (l'image de F est rejeté à l'infini).

Avec $\frac{1}{\overline{SA'}} = 0$, on obtient :

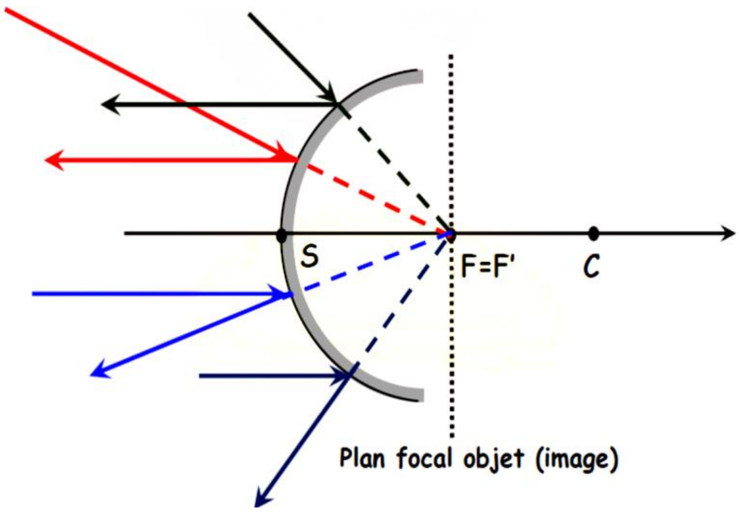
$$\frac{1}{\overline{SF}} = \frac{2}{R} \Rightarrow \boxed{\overline{SF} = \frac{R}{2}} \qquad (F' = F)$$

Les foyers objet et image F et F' sont confondus.



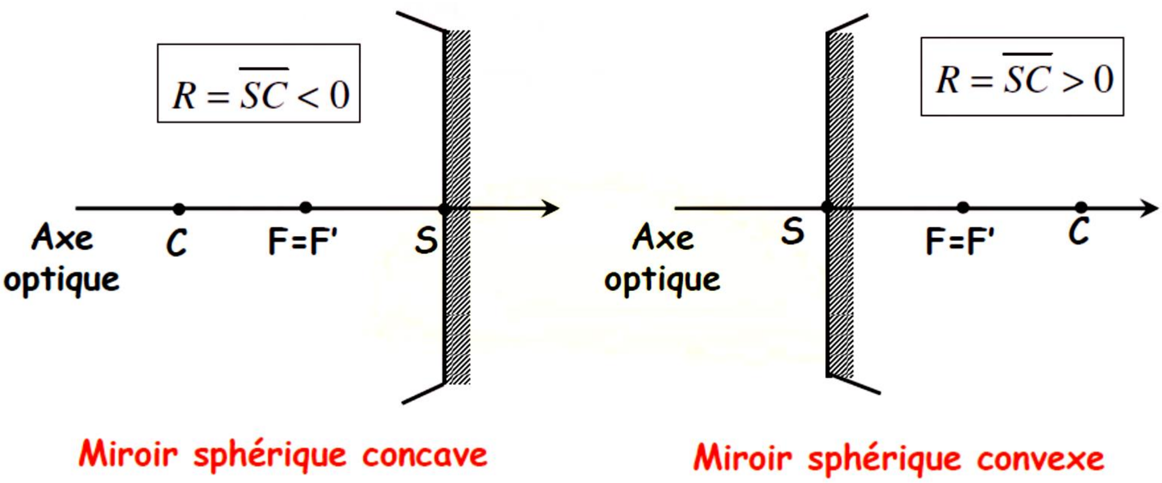
$f = \overline{SF} = \frac{R}{2}$: distance focale objet $\qquad V = \frac{1}{f}$: Vergence objet

- **Cas du miroir convexe**



2.4. Modélisation du miroir sphérique

On assimile le miroir sphérique à son plan tangent en S



2.5. Construction d'une image

Pour effectuer cette construction, nous allons tirer profit des propriétés des foyers, du centre C et du sommet S et utiliser des rayons particuliers.

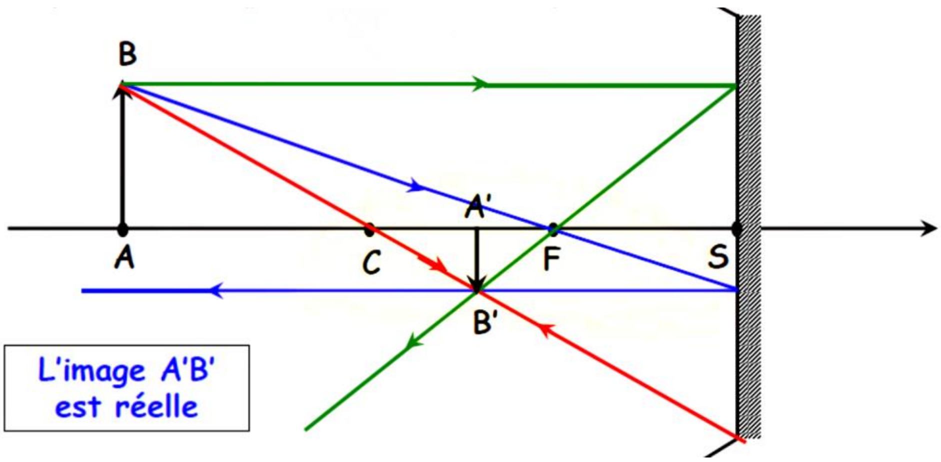
2.5.1.Rayons particuliers

En pratique, on choisit deux rayons parmi les rayons particuliers suivants :

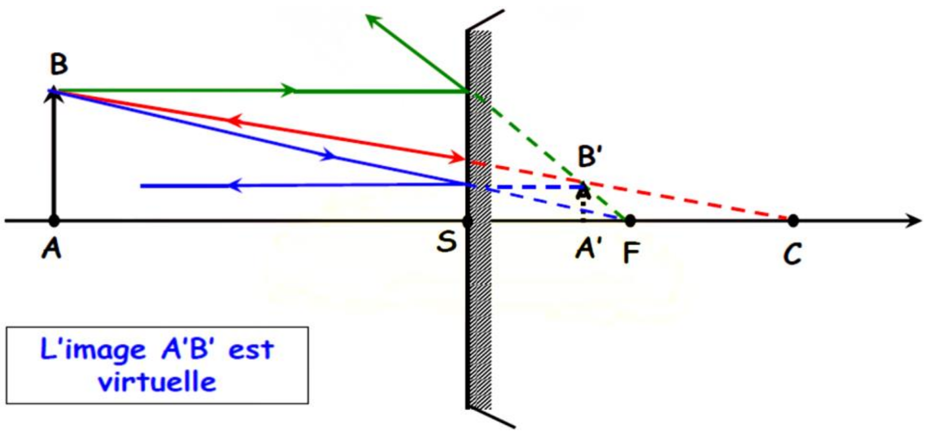
- Tout rayon incident passant par le centre C, se réfléchit sur lui-même,
- Tout rayon incident passant par le foyer objet F, se réfléchit parallèlement à l'axe,
- Tout rayon incident parallèle à l'axe, se réfléchit en passant par le foyer image F',
- Tout rayon incident en S, se réfléchit symétriquement à l'axe optique.

2.5.2.Quelques constructions

- La figure suivante donne le principe de construction d'une image à l'aide de rayons particuliers pour un miroir concave



- La figure suivante donne le principe de construction d'une image à l'aide de rayons particuliers pour un miroir convexe



<u>Remarques</u> :

- un miroir concave ne donne jamais une image virtuelle d'un objet virtuel,
- un miroir convexe ne donne jamais une image réelle d'un objet réel,
- quel que soit le type de miroir, l'image est renversée quand elle est de même nature que l'objet et de même sens que l'objet quand elle est de nature différente.

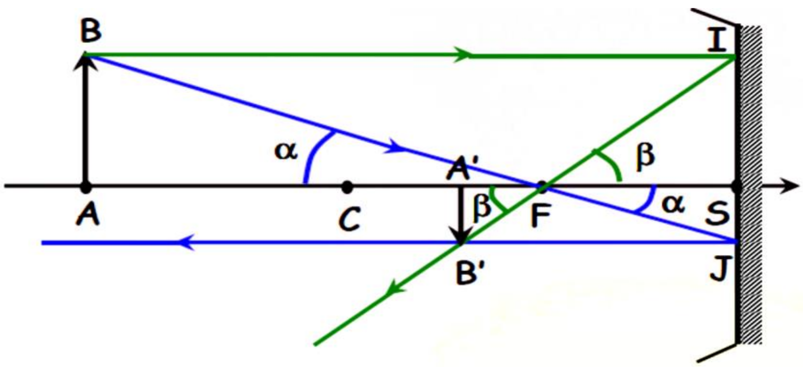
Quelques définitions

- **Objet réel** : les rayons issus de l'objet se dirigent vers le système optique.
- **Objet virtuel** : les rayons arrivent sur le système optique avant de pouvoir éclairer l'objet situé à droite du système.
- **Image réelle** : les rayons sortant du système optique se dirigent tous vers l'image. L'image peut être observée avec un écran.
- **Image virtuelle** : les rayons sortant du système optique semble tous provenir de l'image. On ne peut pas observer l'image virtuelle avec un écran.

2.6. Conjugaison et grandissement avec origine aux foyers (formules de Newton)

- **Relation de conjugaison**

La démonstration est faite dans le cas d'un miroir concave. On souhaite trouver une relation entre $\overline{FA}$ et $\overline{FA'}$



$$\alpha = -\frac{\overline{AB}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{SJ}}{\overline{FS}} \qquad ; \qquad \beta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{FA'}} = \frac{\overline{SI}}{\overline{FS}}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{SJ} &= \overline{A'B'}\\ \overline{SI} &= \overline{AB}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} \Rightarrow \boxed{\overline{FA}.\overline{FA'}. = \overline{FS}^2 = f^2 = \frac{R^2}{4}}$$

C'est la relation de conjugaison avec origine en *F* (formule de Newton)

- **Grandissement γ :**

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}$$

$$f = \overline{SF} = -\overline{FS}$$

Il vient donc :

$$\boxed{\gamma = -\frac{\overline{FA'}}{f} = -\frac{f}{\overline{FA}}}$$

$\gamma > 0$: l'image est droite (même sens que l'objet)

$\gamma < 0$: l'image est renversée

2.7. Conjugaison et grandissement avec origine aux foyers (formules de Descartes)

- **Relation de conjugaison**

On part de la relation $\overline{FA}.\overline{FA'}. = \overline{FS}^2 = f^2$

$$\left.\begin{matrix} \overline{FA} = \overline{CA} - \overline{CF} \\ \overline{FA'} = \overline{CA'} - \overline{CF} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (\overline{CA} - \overline{CF}).(\overline{CA'} - \overline{CF}) = f^2$$

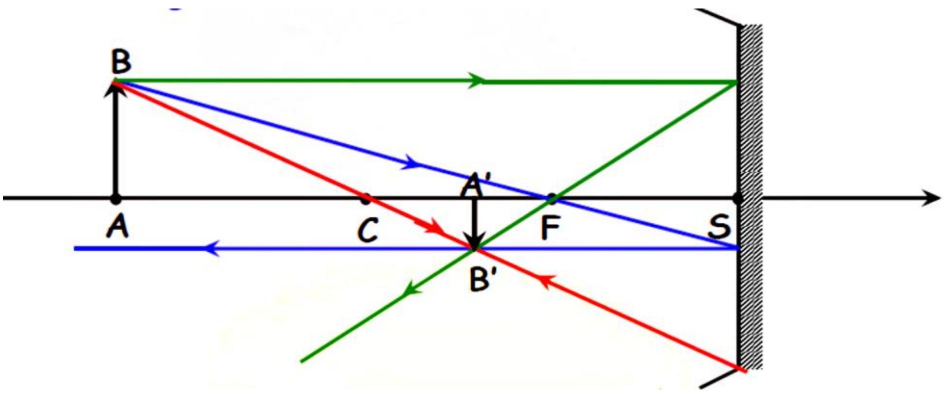
$$\Longrightarrow \overline{CA}.\overline{CA'} - \overline{CA}.\overline{CF} - \overline{CA'}.\overline{CF} + \overline{CF}^2 = f^2$$

$\overline{CF}^2 = f^2$ d'où en divisant par $\overline{CA}.\overline{CA'}.\overline{CF}$ il vient

$$\boxed{\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{1}{\overline{CF}} = -\frac{1}{f}}$$

C'est la relation de conjugaison avec origine au centre (formule de Descartes)

- **Grandissement γ :**



$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}}$$

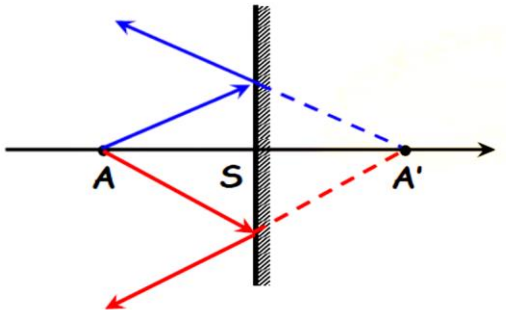
On montre aussi que le grandissement avec origine au sommet (en utilisant le rayon passant par S) est :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}}$$

2.8. Cas particulier du miroir plan

Un miroir plan est un miroir sphérique de rayon infini : le centre et les foyers sont rejetés à l'infini. On dit que le miroir plan est « afocal » (foyers rejetés à l'infini)

La formule de conjugaison avec origine au sommet donne immédiatement : $\overline{SA'} = \overline{SA}$



L'image A' de A est le symétrique de A par rapport au plan du miroir. A' est une image virtuelle. Le grandissement vaut 1.

Le miroir plan est rigoureusement stigmatique et aplanétique.